



Station
„Figurierte Zahlen“
Teil 2

Arbeitsheft

--	--	--	--	--	--	--	--

Teilnehmercode

Schule

Klasse

Tischnummer



Mathematik-Labor
"Mathe ist mehr"



Station „Figurierte Zahlen“

Einführung

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Schon die alten Griechen haben Zahlen mit Hilfe von Zählsteinen dargestellt. Die Steinchen wurden zu unterschiedlichen Figuren zusammengelegt. Dadurch haben die Griechen wichtige Eigenschaften von Zahlen untersucht und aufzeigen können. Auch noch viele Jahrhunderte später wurden mit Hilfe von Figuren und regelmäßigen Mustern mathematische Aussagen bewiesen.

Wichtig: Bearbeitet bitte alle Aufgaben der Reihe nach!



Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft.



Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen.



Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video.



Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch.



Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team



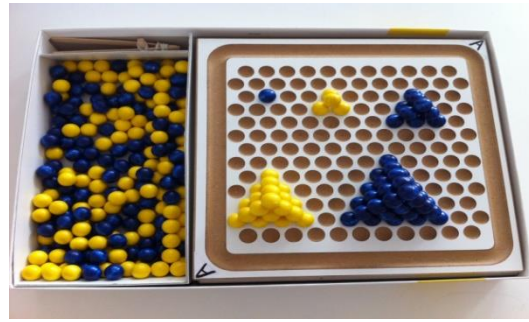
Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

Neben den Dreieckszahlen, die ihr im ersten Teil dieser Station bereits kennen gelernt habt, gibt es noch viele weitere figurierte Zahlen. Viele von ihnen lassen sich aus Dreieckszahlen zusammensetzen.

Material

- Legebretter (mit je zwei unterschiedlichen Seiten)
- Holzkugeln in zwei Farben
- zwei Holzpinzetten (zum Greifen der Holzkugeln)



Natürlich sind euch die **Quadratzahlen** schon längst bekannt: Häufig muss man in der Schule die Quadratzahlen von 1^2 bis 25^2 auswendig lernen, weil man sie für viele Berechnungen benötigt. Die Quadratzahlen können ebenfalls abgekürzt werden: Q_1 steht für die erste, Q_2 für die zweite Quadratzahl usw.

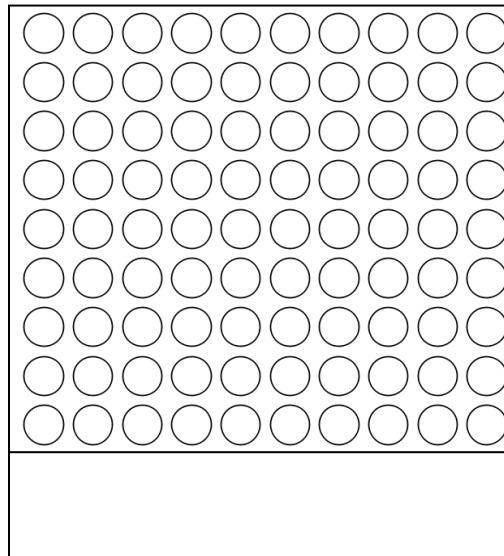
2.1 Legt und zeichnet die Figuren zu Q_1 bis Q_4 . Notiert die Anzahl der Kugeln unter die Figuren. **Beachtet dabei, dass die erste Figur nur aus einer Kugel besteht, denn die erste Quadratzahl ist die 1.**



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

- 2.2 Legt die beiden Dreieckszahlen D_2 und D_3 in unterschiedlichen Farben als rechtwinklige Dreiecke auf dem Legebrett (Seite B) so hin, dass sie sich zu einem Quadrat ergänzen. Zeichnet die Figur ab. Welche Zahl stellt dieses Quadrat dar? Legt und zeichnet auch D_3 und D_4 als Quadrat.



- 2.3 Aus Aufgabe 2.2 kann man erkennen, dass die Quadratzahlen durch Dreieckszahlen dargestellt werden können. Berechnet die Quadratzahlen aus den Dreieckszahlen.



$$Q_1 = D_1 = 1$$

$$Q_2 = D_1 + D_2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$Q_3 = D_2 + \underline{\quad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$Q_4 = \underline{\quad} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Es zeigt sich, dass die Summe von zwei aufeinander folgenden Dreieckszahlen immer eine Quadratzahl ergibt. Für einen Beweis benötigt ihr aber mehr als die Veranschaulichung einiger Beispiele. Es bietet sich an, wieder Terme zu verwenden.



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

- 2.4 Notiert euch einen Term zur Berechnung der Dreieckszahl D_n . Wie müsste dann der Term zur Berechnung der darauffolgenden Dreieckszahl D_{n+1} lauten? Notiert auch diesen Term.



$D_n =$ _____

$D_{n+1} =$ _____

- 2.5 Nun könnt ihr die Summe von zwei aufeinander folgenden Dreieckszahlen D_n und D_{n+1} mit Hilfe der Terme bilden. Man kann den Term vereinfachen. Notiert eure Umformungen hier. Erkennt ihr an einem Schritt einen quadratischen Term?



$D_n + D_{n+1} =$

e



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

- 2.6 Könnt ihr euch vorstellen, was man unter **Rechteckzahlen** versteht? Notiert eure Vermutungen hier.

Wir betrachten hier nur solche Rechteckzahlen, bei denen sich Länge und Breite des Rechtecks nur um 1 unterscheiden.

- 2.7 Legt die Figuren zu den ersten 4 Rechteckzahlen auf den Legebrettern (Seite B) und zeichnet die Figuren anschließend in das nachstehende Feld. Notiert die Anzahl der verwendeten Kugeln unter jedes Rechteck.



Die Zahlen unterhalb der Rechtecke in der Aufgabe 2.7 nennt man **Rechteckzahlen**. Für die Rechteckzahlen kann man ebenfalls Abkürzungen verwenden: So kann die erste Rechteckzahl mit R_1 , die zweite Rechteckzahl mit R_2 usw. bezeichnet werden.

Kontrolliert eure Zeichnungen anhand der **Simulation 7**.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

2.8 Vervollständigt die Tabelle mit den Rechteckzahlen. Achtet dabei auch auf die Veränderung von einer Rechteckzahl zur nächsten!



Bezeichnung	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	
Rechteckzahl	2	6						
Veränderung								

2.9 Bestimmt die zehnte Rechteckzahl, also R_{10} . Wie lässt sie sich berechnen? Notiert eure Vorgehensweise.



$R_{10} = \underline{\hspace{10em}}$

Auch hier ist es recht aufwendig, eine bestimmte Rechteckzahl immer wieder mit Hilfe vorausgehender Rechteckzahlen zu berechnen. Abhilfe schaffen hier wieder ... **Terme!**

2.10 Gebt einen Term zur Berechnung einer beliebigen Rechteckzahl R_n an.



$R_n = \underline{\hspace{10em}}$



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

2.11 In der **Simulation 3** ist ein Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Rechteckzahlen zu erkennen. Schaut euch die Simulation noch einmal an. Welchen Zusammenhang vermutet ihr? Notiert eure Vermutungen.



2.12 Versucht nun, eure Vermutung zu beweisen. Ihr könnt euch dabei an der Vorgehensweise zur Lösung von Aufgabe 2.5 orientieren. Vergleicht anschließend euer Ergebnis mit dem Term zur Berechnung von R_n aus Aufgabe 2.10.



$D_n + D_n =$

Damit habt ihr wiederum einen Beweis formuliert: Ihr habt gezeigt, dass die Summe von zwei gleichen Dreieckszahlen immer eine Rechteckzahl ergibt.



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

- 2.13 Könnt ihr euch noch andere „Rechteckzahlen“ vorstellen? Tauscht euch in eurer Gruppe darüber aus und haltet eure Ergebnisse in Form von figurierten Zahlen oder schriftlich hier fest.

Bisher habt ihr zu vorgegebenen geometrischen Darstellungen von figurierten Zahlen Terme aufgestellt, die ihre Bildungsweise beschreiben. Man kann aber auch umgekehrt zu vorgegebenen Termen überlegen, wie wohl die dazugehörigen Figuren aussehen könnten.

- 2.14 Stellt euch vor, eine figurierte Zahl F_n , deren geometrische Darstellung ihr noch nicht kennt, kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$F_n = n^2 + 2 \cdot n$$

Wie könnte die dazugehörige geometrische Figur aussehen? Haltet eure Ideen schriftlich oder in Form eine Zeichnung hier fest.

- 2.15 Sind die F_n auch Rechteckzahlen? Diskutiert in der Gruppe und notiert euer gemeinsames Ergebnis.

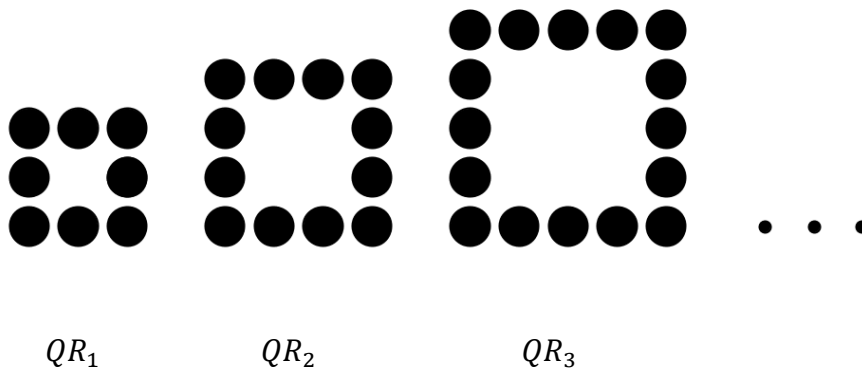


Station „Figurierte Zahlen“

Zusatzaufgabe

Zusätzliche Aufgabe:

Natürlich kann man sich noch viele weitere figurierte Zahlen ausdenken. Die folgende Abbildung zeigt die geometrische Veranschaulichung der ersten drei **Quadrat-Rand-Zahlen**:



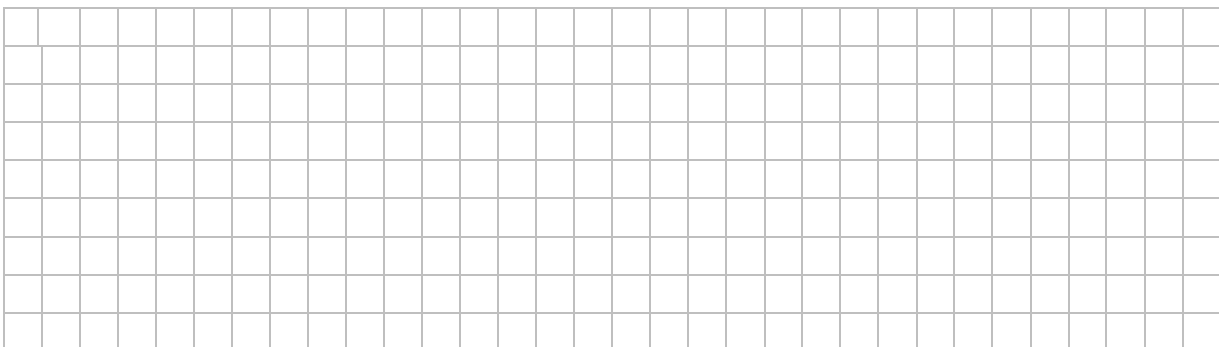
Eine beliebige Quadrat-Rand-Zahl QR_n kann durch verschiedene Termen beschrieben werden:

1. Möglichkeit: $QR_n = (n + 2)^2 - n^2$

2. Möglichkeit: $QR_n = 4 \cdot (n + 1)$

2.17 Erklärt euch in der Gruppe gegenseitig, wie die beiden Terme mit den Figuren und der Anzahl der Kreise in ihnen zusammenhängen.

2.18 Zeigt, dass die beiden Terme äquivalent zueinander sind.



Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
RPTU Kaiserslautern-Landau
Institut für Mathematik
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7
76829 Landau

<https://mathe-labor.de>

Erstellt von:
Monika Elisabeth Feise, Jana Seemann, Isabelle Thewes, Dominik Weber

Betreut von:
Rolf Oechsler

Variante A

Veröffentlicht am:
11.07.2017