Schule

Klasse

Tischnummer

Station
„Figurierte Zahlen“
Teil 1

Arbeitsheft

Teilnehmercode

Mathematik-Labor
"Mathe ist mehr"

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Schon die alten Griechen haben Zahlen mit Hilfe von Zählsteinen dargestellt. Die Steinchen wurden zu unterschiedlichen Figuren zusammengelegt. Dadurch haben die Griechen wichtige Eigenschaften von Zahlen untersuchen und aufzeigen können. Auch noch viele Jahrhunderte später wurden mit Hilfe von Figuren und regelmäßigen Mustern mathematische Aussagen bewiesen.

Wichtig: Bearbeitet bitte alle Aufgaben der Reihe nach!

Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft.

Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen.

Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video.

Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch.

Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team

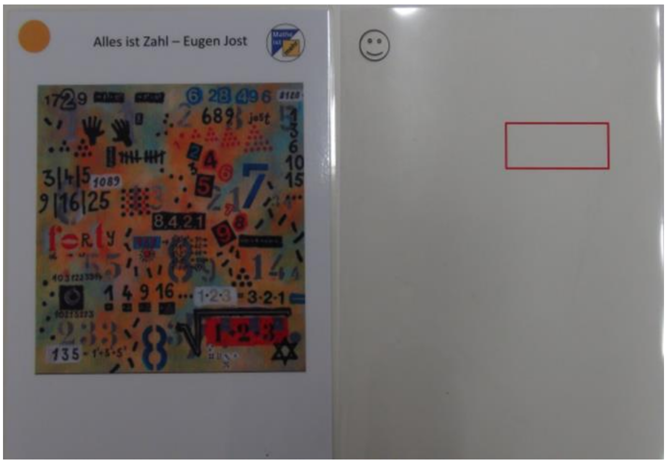
Station „Figurierte Zahlen“

Einführung

Betrachtet das Bild „Alles ist Zahl“ des Schweizer Künstlers Eugen Jost.

Material

- Bild „Der Zahlenteufel“



Ihr könnt darin neben Zahlen und anderen mathematischen Symbolen auch Figuren aus regelmäßig angeordneten Punkten erkennen. An einigen Stellen sind es sogar Folgen mehrerer Figuren.

Legt die Folie mit dem roten Kasten so auf das Bild, dass ein gelber Smiley in der linken oberen Ecke entsteht.

Wie kann man diese Figurenfolge beschreiben?

Wie könnte man diese Zahlen nennen? Diskutiert anschließend eure Ideen in der Gruppe.

Station „Figurierte Zahlen“

Einführung

Erkennt ihr auf dem gesamten Bild noch andere Möglichkeiten Zahlen darzustellen? Fallen euch noch weitere Beispiele ein, die nicht auf dem Bild zu sehen sind?

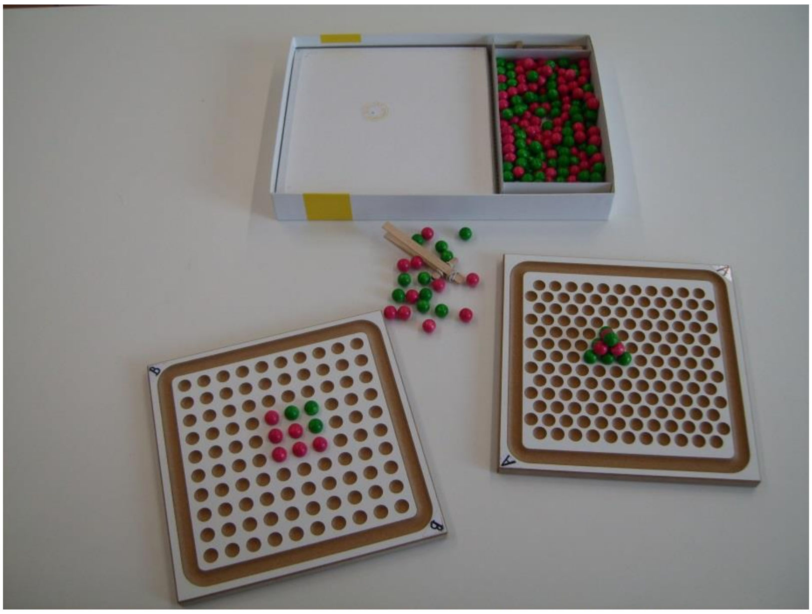
Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

Für die folgenden Aufgaben steht euch dieses Material zur Verfügung:

Material

- Legebretter (auf beiden Seiten benutzbar)
- Holzkugeln in 2 Farben
- 2 Holzpinzetten (zum Greifen der Holzkugeln)



1.1 Legt auf dem Legebrett (Seite A) die Dreiecksmuster nach, die ihr im roten Ausschnitt erkennen könnt. Verwendet dazu nur eine Farbe der Holzkugeln. Erweitert die Folge um zwei Dreiecke.

1.2 Füllt die Tabelle aus. Betrachtet dazu eure gelegten Dreiecksmuster.

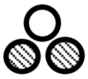
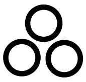
Bezeichnung	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 5
Zeichnung	○				
Anzahl der Kugeln					

Die Anzahl der Kugeln, die ihr unter die Dreiecke geschrieben habt, nennt man **Dreieckszahlen**.

Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

1.3 Wie viele Kugeln kommen beim nächsten und übernächsten Dreieck dazu? Ergänzt hierzu die bereits gelegten Dreiecke mit Kugeln der anderen Farbe zum jeweils nächsten Dreieck.
Füllt die Tabelle aus.

	Figur 1 → 2	Figur 2 → 3	Figur 3 → 4	Figur 4 → 5
Zeichnung				

Überprüft eure Zeichnungen und Ergebnisse mit Hilfe der **Simulation 1**.

Für Dreieckszahlen kann man Abkürzungen verwenden. Die erste Dreieckszahl wird mit D_1 bezeichnet, die zweite Dreieckszahl mit D_2 usw.

Die erste Dreieckszahl D_1 besteht aus 1 Kugel. Man schreibt: $D_1 = 1$

Die zweite Dreieckszahl D_2 besteht aus 3 Kugeln. Man schreibt: $D_2 = 3$

Die dritte Dreieckszahl ___ besteht aus ___ Kugeln. Man schreibt: _________

1.4 Beschreibt, wie man die Dreieckszahl D_4 mit Hilfe der vorausgegangenen Dreieckszahl D_3 berechnen kann.

D_4 = ____

Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

1.5 Vervollständigt nun die Tabelle mit den ersten sieben Dreieckszahlen. Achtet dabei auch auf die Veränderungen von einer Dreieckszahl zur nächsten!

Bezeichnung	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
Dreieckszahl	1	3	6	10			
Veränderung	+ 2	+ 3					

1.6 Bestimmt nun die zehnte Dreieckszahl, also D_{10}. Wie lässt sie sich berechnen?

D_{10} = ______________________________

Vielleicht ist euch aufgefallen, dass dies nicht möglich ist, ohne vorher D_9 und D_8 zu berechnen. Einfacher wäre es, wenn man jede beliebige Dreieckszahl direkt berechnen könnte. Solche allgemeinen Rechenvorschriften nennt man in der Mathematik **Terme**.
Eure Aufgabe wird es nun sein, Terme zur Berechnung einer beliebigen Dreieckszahl herzuleiten.

Als Vorbereitung dazu ist es nötig, die Dreiecksfiguren anders anzuordnen.
Schaut euch dazu **Simulation 2** an.

1.7 Was wurde an den Dreieckszahlen geändert? Was ist gleich geblieben?

Durch geschicktes Aneinanderlegen von zwei rechtwinkligen Dreieckszahlen lassen sich Rechtecke erzeugen. Dies könnt ihr in **Simulation 3** erkennen.

Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

1.8 Was habt ihr in der eben angeschauten Simulation beobachtet?

1.9 Wie lässt sich eine beliebige Dreieckszahl mit Hilfe der Rechtecke leicht bestimmen? Beschreibt eure Vorgehensweise und notiert anschließend den Term zur Berechnung der Dreieckszahl D_5.

$D_5 =$

Eine beliebige Dreieckszahl bezeichnet man häufig mit D_n. Der Buchstabe n steht dabei als Platzhalter für eine beliebige natürliche Zahl und wird als **Variable** bezeichnet.

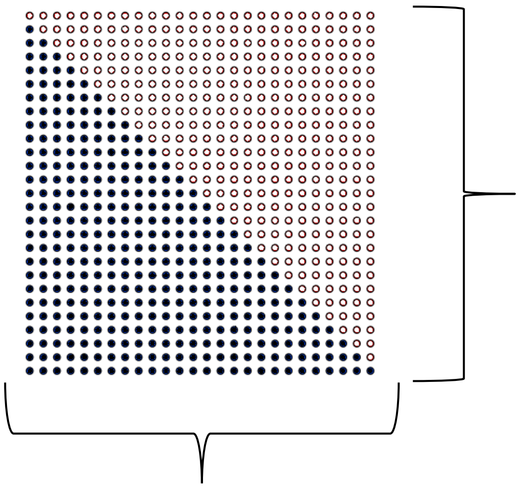
Zur Bestimmung einer beliebigen Dreieckszahl D_n kann man wie in der vorherigen Simulation vorgehen:
Man „schiebt“ zwei rechtwinklige Dreiecke, die die Dreieckszahl D_n darstellen und von denen eins „auf der Spitze steht“, wieder zu einem Rechteck zusammen.

Überprüft die Vorgehensweise anhand von **Simulation 4**.

Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

1.10 Wie viele Kreise befinden sich an den Rändern der rechteckigen Anordnung in **Simulation 4**? Stellt mit Hilfe der Anzahl der Kreise an den Rändern einen Term zur Berechnung von D_n auf. **Zählt nicht alle Kreise nach, sondern verwendet die vorgegebenen Angaben aus der Simulation 4!**



Anzahl der Kreise:

____

Anzahl der Kreise:

____

D_n =

1.11 Testet nun euren aufgestellten Term. Setzt für die Variable n nacheinander drei verschiedene Zahlen ein und berechnet damit drei verschiedene Dreieckszahlen.

Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

1.12 Füllt nun das „Handout“ aus. Dieses liegt auf euren Tischen aus.

★ Zusatzaufgabe

In Aufgabe 1.10 habt ihr gelernt, wie man Dreieckszahlen berechnen kann. Man kann aber auch anders vorgehen, um Dreieckszahlen zu bestimmen. Schaut euch dazu **Simulation 5** an.

1.13 Was konntet ihr in der Simulation 5 beobachten? Vergleicht die **Simulation 5** auch mit der **Simulation 4**.

1.14 Stellt zur Berechnung einer Dreieckszahl D_n, passend zu der Darstellung in **Simulation 5**, einen Term auf.

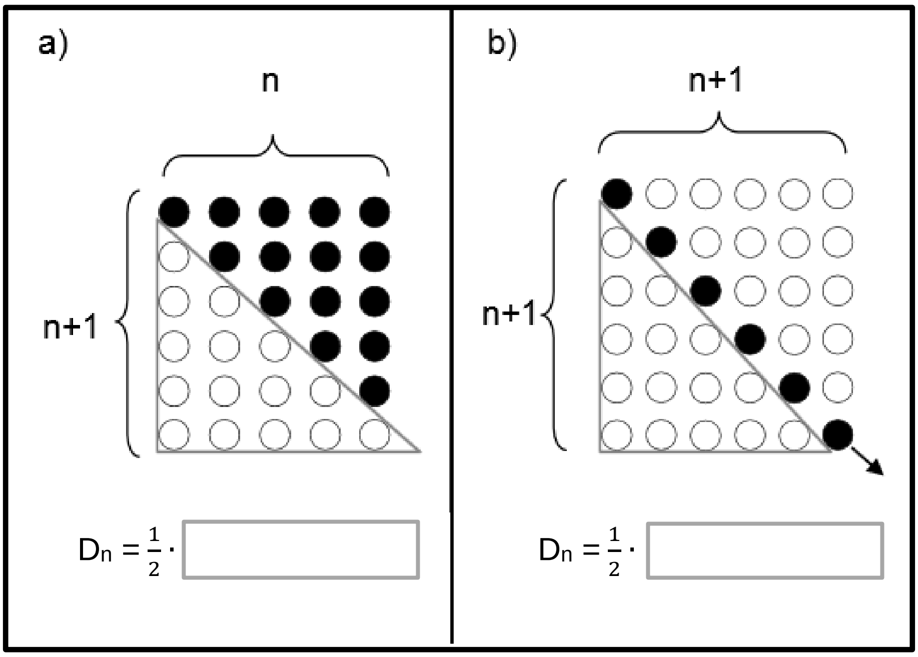
$D_n =$

Wie ihr sicherlich festgestellt habt, gibt es mehrere Möglichkeiten einen Term zur Berechnung einer Dreieckszahl D_n aufzustellen.

Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Dreieckszahlen

1.15 Tragt unter jede Abbildung den passenden Term zur Berechnung der Dreieckszahl D_n ein.



Setzt man in jeden Term aus der vorherigen Aufgabe für n eine natürliche Zahl ein, kann man die entsprechende Dreieckszahl D_n bestimmen. Da beide Terme bei der Einsetzung der gleichen Zahl denselben Wert liefern, nennt man sie **äquivalent**.

Um nachzuweisen, dass zwei Terme tatsächlich äquivalent sind, kann man folgendermaßen vorgehen:
Man zeigt, dass einer der Terme so umgeformt werden kann, dass er mit dem anderen Term schließlich übereinstimmt. Oder man vereinfacht beide Terme so weit, bis sie dieselbe Form aufweisen.

1.16 Vergleicht nun die beiden Terme a) und b) aus Aufgabe 1.15 miteinander. Versucht mit Hilfe von Termumformungen zu zeigen, dass die Terme äquivalent sind.

$$\frac{1}{2} \cdot [(n+1)^2-(n+1)] \overset{?}{=} \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
RPTU Kaiserslautern-Landau
Institut für Mathematik
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7
76829 Landau

https://mathe-labor.de

Zusammengestellt von:
Kirstin Achatz, Theresa Exle, Anna Lurye

Betreut von:
Rolf Oechsler

Variante B

Veröffentlicht am:
20.12.2017