Schule

Klasse

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Station„Figurierte Zahlen“Teil 2Arbeitsheft |

|  |
| --- |
|  |
| Tischnummer |

 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  Teilnehmercode  |

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Schon die alten Griechen haben Zahlen mit Hilfe von Zählsteinen dargestellt. Die Steinchen wurden zu unterschiedlichen Figuren zusammengelegt. Dadurch haben die Griechen wichtige Eigenschaften von Zahlen untersuchen und aufzeigen können. Auch noch viele Jahrhunderte später wurden mit Hilfe von Figuren und regelmäßigen Mustern mathematische Aussagen bewiesen.

Wichtig: Bearbeitet bitte alle Aufgaben der Reihe nach!



|  |  |
| --- | --- |
|  | Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft. |
|  | Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen. |
|  | Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video. |
|  | Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch. |

Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team

Schaut euch eure Zusammenfassungen vom ersten Teil nochmals an. Klärt eventuell auftretende Fragen in der Gruppe.

Neben den Dreieckszahlen, die ihr im ersten Teil dieser Station bereits kennen gelernt habt, gibt es noch weitere figurierte Zahlen. Viele von ihnen lassen sich aus Dreieckszahlen zusammensetzen.

|  |  |
| --- | --- |
| Material* Legebretter (auf

beiden Seiten benutzbar)* Holzkugeln in 2

Farben* 2 Holzpinzetten

(zum Greifen der Holzkugeln) |  |

2.1 Legt die Dreieckszahl $D\_{3}$ auf dem Legebrett (Seite B) in einer Farbe aus. Legt die Dreieckszahl $D\_{4}$ in einer anderen Farbe so an, dass ein Quadrat entsteht. Malt das entstandene Quadrat ab und notiert die Anzahl der Kugeln.

In der Schule habt ihr schon einige Quadratzahlen kennen gelernt. Habt ihr die Quadratzahlen $1^{2}$ bis $25^{2}$ schon berechnet oder auswendig gelernt? Diese können mit $Q\_{1}$, $Q\_{2}$ … abgekürzt werden.

2.2 Zeichnet zu den ersten vier Quadratzahlen $Q\_{1}$ bis $Q\_{4}$ die dazugehörigen Figuren und vervollständigt die Tabelle.

***Beachtet dabei, dass das erste „Quadrat“ nur aus einer Kugel besteht, denn die erste Quadratzahl ist die 1.***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Bezeichnung | Q1 | Q2 |  |  |
| Zeichnung |  |  |  |  |
| Anzahl der Kugeln |  |  |  |  |

2.3 Diskutiert in der Gruppe, wie man ohne alle Kugeln zu zählen die Gesamtkugelanzahl eines Quadrats berechnen kann. Notiert eure Ideen und verwendet dabei Fachbegriffe, die ihr in dieser Station gelernt habt.

2.4 Können diese Quadratzahlen aus zwei Dreieckszahlen zusammengesetzt werden? Versucht dies an euren Zeichnungen aus 2.2 deutlich zu machen.

2.5 Versuche die Quadratzahlen rechnerisch durch Dreieckszahlen darzustellen. Hierzu kannst du deine Zeichnungen aus 2.2 verwenden oder das Material.



 $Q\_{1}=D\_{1}$

 $Q\_{2}=D\_{1}+\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

 $Q\_{3}= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

 $Q\_{4}= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

 $Q\_{n+1}= \\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$

Die Aufgabe 2.4 auf der vorhergehenden Seite hat euch gezeigt, dass die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen eine Quadratzahl ergibt.

Allgemein kann man sagen, dass $Q\_{n+1}=D\_{n}+D\_{n+1}$ ist.

Wir wollen nun den Term zu den Quadratzahlen mit Hilfe von denen aus den Dreieckszahlen herleiten.

2.6 Notiert folgende Terme:



$$D\_{n}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

$$D\_{n+1}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

2.7 Berechne die Quadratzahl $Q\_{n+1}$ mit Hilfe der obigen Formeln. Gehe schrittweise vor: Qn+1= Dn +

 Dn+1 =

1. Setze die Terme ein:
2. Klammere ½ aus:
3. Klammere (n+1) aus:
4. Vereinfache die Klammer:
5. Kürze:
6. Erkläre, warum dies Qn+1 ist:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Herzlichen Glückwunsch!**

Ihr habt nun den ersten Schritt geschafft und gezeigt, dass zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen eine Quadratzahl ergeben.

2.8 Könnt ihr euch vorstellen, was man unter **Rechteckzahlen** versteht? Notiert eure Ideen. Besprecht eure Vermutungen in der Gruppe.

2.9 Als Rechteckzahlen betrachten wir nun solche Zahlen, die als Rechtecke dargestellt werden können. Hierbei unterscheiden sich Länge und Breite jeweils nur um 1. Legt die ersten 4 Rechteckzahlen auf dem Legebrett (Seite B) aus und füllt die Tabelle aus:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeichnung |  |  |  |  |
| Anzahl der Kugeln |  |  |  |  |



Kontrolliert eure Zeichnungen anhand der **Simulation 7** und verbessert diese gegebenenfalls.

Die Anzahl der Kugeln der Rechtecke nennt man **Rechteckzahlen**. Die erste Rechteckzahl kann man mit $R\_{1}$, die zweite mit $R\_{2}$ bezeichnet werden usw.

2.10 Vervollständigt die Tabelle mit den Rechteckzahlen. Achtet dabei auf die Veränderung von einer Rechteckzahl zur nächsten!

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Bezeichnung | $$R\_{1}$$ | $$R\_{2}$$ | $$R\_{3}$$ | $$R\_{4}$$ | $$R\_{5}$$ | $$R\_{6}$$ | $$R\_{7}$$ |  |
| Anzahl derKugeln | 2 | 6 |  |  |  |  |  |  |
| Veränderung |  **+6****+4** |

2.11 Diskutiert in der Gruppe, wie man die Rechteckzahlen aus den vorhergehenden berechnen kann. Schreibt die Terme zu folgenden Rechteckzahlen auf:

$$R\_{2}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

$$R\_{3}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

$$R\_{4}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

$$R\_{5}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

$$R\_{10}=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

Auch hier ist es recht aufwendig, eine bestimmte Rechteckzahl immer wieder mit Hilfe vorausgehender Rechteckzahlen zu berechnen. Abhilfe schaffen hier wieder ... **Terme**!

Rn =

2.12 Gebt einen Term zur Berechnung einer beliebigen Rechteckzahl $R\_{n}$ an.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | Rn= |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

2.13 In der **Simulation 3** aus Teil 1 ist ein Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Rechteckzahlen zu erkennen. Schaut euch die Simulation noch einmal an. Welchen Zusammenhang vermutet ihr? Notiert eure Vermutungen.

2.14 Versucht nun, eure Vermutung mit Hilfe von Termen zu beweisen. Ihr könnt euch dabei an der Vorgehensweise zur Lösung von Aufgabe 2.7 orientieren. Überprüft anschließend euer Ergebnis mit dem Term zur Berechnung von $R\_{n}$ aus Aufgabe 2.10.

 Dn + Dn =

1. Setze die Terme ein:
2. Klammere ½ aus:
3. Klammere (n+1) aus:
4. Vereinfache die Klammer:
5. Kürze:
6. Erkläre, warum dies Rn ist:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Herzlichen Glückwunsch!**

Nun habt ihr zum einen gezeigt, dass zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen eine Quadratzahl ergeben und dass die Summe von zwei gleichen Dreieckszahlen immer eine Rechteckzahl ergibt.

2.15 Füllt nun das „Handout“ aus. Dieses liegt auf euren Tischen aus

 Zusatzaufgabe

Bisher habt ihr Terme zu vorgegebenen geometrischen Figuren (Dreieck, Quadrat, Rechteck) aufgestellt. Nun wollen wir zu vorgegebenen Termen dazugehörige Figuren finden.

2.16 Stellt euch vor, eine figurierte Zahl $F\_{n}$, dessen geometrische Darstellung ihr noch nicht kennt, kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$F\_{n}=n^{2}+2∙n$$

Wie könnte die dazugehörige geometrische Figur aussehen? Haltet eure Ideen schriftlich oder in Form einer Zeichnung hier fest.

Um eine geometrische Darstellung für die Anzahl der Kugeln zu finden, ist es hilfreich, einige dieser Zahlen mit Hilfe des vorgegebenen Terms auszurechnen.

2.17 Vervollständigt die Tabelle. Setzt in den Term $F\_{n}=n^{2}+2∙n$ für n nacheinander die Zahlen 1 bis 7 ein. Berechnet somit die Anzahl der Kugeln. Achtet dabei auch auf die Veränderung von einer Zahl zur nächsten.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Bezeichnung | $F\_{1}$  | $F\_{2}$  | $$F\_{3}$$ | $F\_{4}$  | $F\_{5}$  | $F\_{6}$  | $F\_{7}$  |  |
| Anzahl der Kugeln |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Veränderung |   |

2.18 Legt zu jedem F eine passende Figur. Überlegt euch welche Seite des Legebretts ihr benutzen wollt. Achtet darauf, dass alle Figuren dieselbe Form haben müssen, ihre Größe sich aber von Zahl zu Zahl verändert.

2.19 Für den Fall, dass ihr noch keine passende Figur gefunden habt, könnte euch eine Termumformung weiterhelfen. Klammert hierzu geschickt aus.

$$F\_{n}=n^{2}+2∙n=\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_\\_$$

2.20 Die Faktoren stellen die Anzahl der Kugeln an den Rändern der Figur dar. Was fällt euch auf? Diskutiert dies in der Gruppe und verwendet die entsprechenden Fachbegriffe.

Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
RPTU Kaiserslautern-Landau

Institut für Mathematik
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7

76829 Landau

https://mathe-labor.de

Zusammengestellt von:

|  |
| --- |
| Kirstin Achatz, Theresa Exle, Anna Lurye |

Betreut von:

Rolf Oechsler

Variante B

Veröffentlicht am:

11.07.2017