



Station
„Figurierte Zahlen“
Teil 2

Arbeitsheft

Schule

Klasse

Tischnummer

--	--	--	--	--	--	--	--

Teilnehmercode



Mathematik-Labor
"Mathe ist mehr"



Mathematik-Labor

Station „Figurierte Zahlen“

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Schon die alten Griechen haben Zahlen mit Hilfe von Zählsteinen dargestellt. Die Steinchen wurden zu unterschiedlichen Figuren zusammgelegt. Dadurch haben die Griechen wichtige Eigenschaften von Zahlen untersucht und aufzeigen können. Auch noch viele Jahrhunderte später wurden mit Hilfe von Figuren und regelmäßigen Mustern mathematische Aussagen bewiesen.

Wichtig: Bearbeitet bitte alle Aufgaben der Reihe nach!



Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft.



Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen.



Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video.



Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch.



Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team



Station „Figurierte Zahlen“

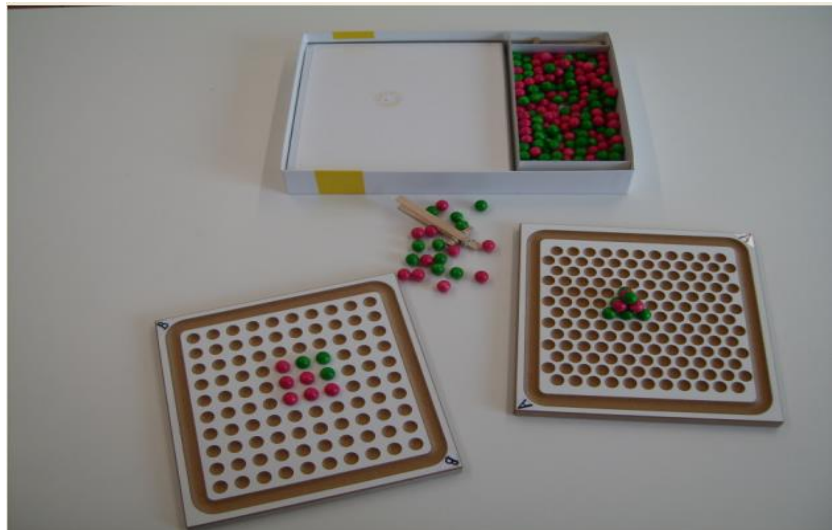
Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

Schaut euch eure Zusammenfassungen vom ersten Teil nochmals an. Klärt eventuell auftretende Fragen in der Gruppe.

Neben den Dreieckszahlen, die ihr im ersten Teil dieser Station bereits kennen gelernt habt, gibt es noch weitere figurierte Zahlen. Viele von ihnen lassen sich aus Dreieckszahlen zusammensetzen.

Material

- Legebretter (auf beiden Seiten benutzbar)
- Holzkugeln in 2 Farben
- 2 Holzpinzetten (zum Greifen der Holzkugeln)



- 2.1 Legt die Dreieckszahl D_3 auf dem Legebrett (Seite B) in einer Farbe aus. Legt die Dreieckszahl D_4 in einer anderen Farbe so an, dass ein Quadrat entsteht. Malt das entstandene Quadrat ab und notiert die Anzahl der Kugeln.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

In der Schule habt ihr schon einige Quadratzahlen kennen gelernt. Habt ihr die Quadratzahlen 1^2 bis 25^2 schon berechnet oder auswendig gelernt? Diese können mit $Q_1, Q_2 \dots$ abgekürzt werden.



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

2.2 Zeichnet zu den ersten vier Quadratzahlen Q_1 bis Q_4 die dazugehörigen Figuren und vervollständigt die Tabelle.

Beachtet dabei, dass das erste „Quadrat“ nur aus einer Kugel besteht, denn die erste Quadratzahl ist die 1.

Bezeichnung	Q_1	Q_2		
Zeichnung	○			
Anzahl der Kugeln				

2.3 Diskutiert in der Gruppe, wie man ohne alle Kugeln zu zählen die Gesamtkugelnanzahl eines Quadrats berechnen kann. Notiert eure Ideen und verwendet dabei Fachbegriffe, die ihr in dieser Station gelernt habt.

2.4 Können diese Quadratzahlen aus zwei Dreieckszahlen zusammengesetzt werden? Versucht dies an euren Zeichnungen aus 2.2 deutlich zu machen.

2.5 Versuche die Quadratzahlen rechnerisch durch Dreieckszahlen darzustellen. Hierzu kannst du deine Zeichnungen aus 2.2 verwenden oder das Material.

$$Q_1 = D_1$$
$$Q_2 = D_1 + \underline{\hspace{2cm}}$$
$$Q_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$Q_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$Q_{n+1} = \underline{\hspace{2cm}}$$





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

Die Aufgabe 2.4 auf der vorhergehenden Seite hat euch gezeigt, dass die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen eine Quadratzahl ergibt.

Allgemein kann man sagen, dass $Q_{n+1} = D_n + D_{n+1}$ ist.

Wir wollen nun den Term zu den Quadratzahlen mit Hilfe von denen aus den Dreieckszahlen herleiten.

2.6 Notiert folgende Terme:

$D_n =$ _____
$D_{n+1} =$ _____

2.7 Berechne die Quadratzahl Q_{n+1} mit Hilfe der obigen Formeln. Gehe schrittweise vor: $Q_{n+1} = D_n +$

$D_{n+1} =$
1. Setze die Terme ein:
2. Klammere $\frac{1}{2}$ aus:
3. Klammere $(n+1)$ aus:
4. Vereinfache die Klammer:
5. Kürze:
6. Erkläre, warum dies Q_{n+1} ist:





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

Herzlichen Glückwunsch!

Ihr habt nun den ersten Schritt geschafft und gezeigt, dass zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen eine Quadratzahl ergeben.

- 2.8 Könnt ihr euch vorstellen, was man unter **Rechteckzahlen** versteht? Notiert eure Ideen. Besprecht eure Vermutungen in der Gruppe.


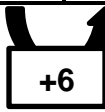




- 2.9 Als Rechteckzahlen betrachten wir nun solche Zahlen, die als Rechtecke dargestellt werden können. Hierbei unterscheiden sich Länge und Breite jeweils nur um 1. Legt die ersten 4 Rechteckzahlen auf dem Legebrett (Seite B) aus und füllt die Tabelle aus:

Zeichnung	○○			
Anzahl der Kugeln				

Kontrolliert eure Zeichnungen anhand der **Simulation 7** und verbessert diese gegebenenfalls.

Die Anzahl der Kugeln der Rechtecke nennt man **Rechteckzahlen**. Die erste Rechteckzahl kann man mit R_1 , die zweite mit R_2 bezeichnet werden usw.

- 2.10 Vervollständigt die Tabelle mit den Rechteckzahlen. Achtet dabei auf die Veränderung von einer Rechteckzahl zur nächsten!

Bezeichnung	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	
Anzahl der Kugeln	2	6						
Veränderung								



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

- 2.11 Diskutiert in der Gruppe, wie man die Rechteckzahlen aus den vorhergehenden berechnen kann. Schreibt die Terme zu folgenden Rechteckzahlen auf:



$R_2 =$ _____
$R_3 =$ _____
$R_4 =$ _____
$R_5 =$ _____
$R_{10} =$ _____

Auch hier ist es recht aufwendig, eine bestimmte Rechteckzahl immer wieder mit Hilfe vorausgehender Rechteckzahlen zu berechnen. Abhilfe schaffen hier wieder ... **Terme!**

$R_n =$ _____

- 2.12 Gebt einen Term zur Berechnung einer beliebigen Rechteckzahl R_n an.



$R_n =$

- 2.13 In der **Simulation 3** aus Teil 1 ist ein Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Rechteckzahlen zu erkennen. Schaut euch die Simulation noch einmal an. Welchen Zusammenhang vermutet ihr? Notiert eure Vermutungen.



--

★ Zusatzaufgabe

Bisher habt ihr Terme zu vorgegebenen geometrischen Figuren (Dreieck, Quadrat, Rechteck) aufgestellt. Nun wollen wir zu vorgegebenen Termen dazugehörige Figuren finden.

- 2.16 Stellt euch vor, eine figurierte Zahl F_n , dessen geometrische Darstellung ihr noch nicht kennt, kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$F_n = n^2 + 2 \cdot n$$

Wie könnte die dazugehörige geometrische Figur aussehen? Haltet eure Ideen schriftlich oder in Form einer Zeichnung hier fest.

Um eine geometrische Darstellung für die Anzahl der Kugeln zu finden, ist es hilfreich, einige dieser Zahlen mit Hilfe des vorgegebenen Terms auszurechnen.

- 2.17 Vervollständigt die Tabelle. Setzt in den Term $F_n = n^2 + 2 \cdot n$ für n nacheinander die Zahlen 1 bis 7 ein. Berechnet somit die Anzahl der Kugeln. Achtet dabei auch auf die Veränderung von einer Zahl zur nächsten.

Bezeichnung	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
Anzahl der Kugeln							
Veränderung							

- 2.18 Legt zu jedem F eine passende Figur. Überlegt euch welche Seite des Legebretts ihr benutzen wollt. Achtet darauf, dass alle Figuren dieselbe Form haben müssen, ihre Größe sich aber von Zahl zu Zahl verändert.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Quadrat- und Rechteckzahlen

- 2.19 Für den Fall, dass ihr noch keine passende Figur gefunden habt, könnte euch eine Termumformung weiterhelfen. Klammert hierzu geschickt aus.

$$F_n = n^2 + 2 \cdot n = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 2.20 Die Faktoren stellen die Anzahl der Kugeln an den Rändern der Figur dar. Was fällt euch auf? Diskutiert dies in der Gruppe und verwendet die entsprechenden Fachbegriffe.

Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
RPTU Kaiserslautern-Landau
Institut für Mathematik
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7
76829 Landau

<https://mathe-labor.de>

Zusammengestellt von:
Kirstin Achatz, Theresa Exle, Anna Lurye

Betreut von:
Rolf Oechsler

Variante B

Veröffentlicht am:
11.07.2017