



Station:  
„Kreislauf des Lebens:  
Räuber und Beute im  
Wechselspiel“

Arbeitsheft

--	--	--	--	--	--	--	--

Teilnehmercode

Schule

Klasse

Tischnummer



Mathematik-Labor  
"Mathe ist mehr"





# Mathematik-Labor

## Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

### Liebe Schülerinnen und Schüler!

Heute beschäftigt ihr euch mit einem Thema aus der Ökologie: dem Räuber-Beute-Modell. Dieses Modell hilft zu verstehen, wie sich die Populationen von Räubern und ihrer Beute im Laufe der Zeit gegenseitig beeinflussen.

In den folgenden drei Stationen werdet ihr erarbeiten, welche Auswirkungen Begegnungen zwischen räuberischen Tieren und Beutetieren sowohl kurz als auch langfristig haben. Dabei werdet ihr sowohl mit realen Daten arbeiten, als auch mit einem Modell, welches versucht die reale Situation wieder zu spiegeln.

**Wichtig:** Bearbeitet bitte alle Aufgaben der Reihe nach!

**Blaue Worte** finden sich im Glossar des Hilfehefts.



Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft.



Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen.



Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video.



Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch.



Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team

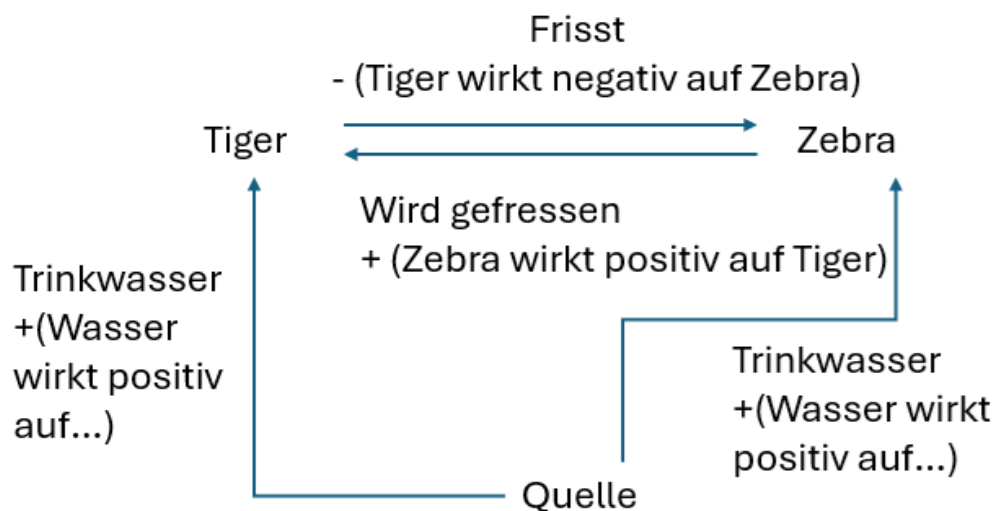


# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 1: Das Räuber-Beute-Modell

Zunächst steht die Frage im Raum, welche Faktoren eine Rolle spielen, wenn es um die Beziehung zwischen **Räuberpopulationen** und **Beutepopulationen** geht. Diese Faktoren bestimmen maßgeblich wie ein passendes Modell auszusehen hat und an welchen „Stellschrauben wir drehen können“.

- 1.1 Notiert auf den digitalen Karteikarten Stichworte, die euch zum Thema Räuber-Beute-Beziehung einfallen.
- 1.2 Setzt nun die digitalen Karteikarten miteinander in Beziehung. Verwendet hierzu Pfeile und +/- Symbole, um positive und negative Auswirkungen zu zeigen. Ein Beispiel zur Verwendung seht ihr hier:

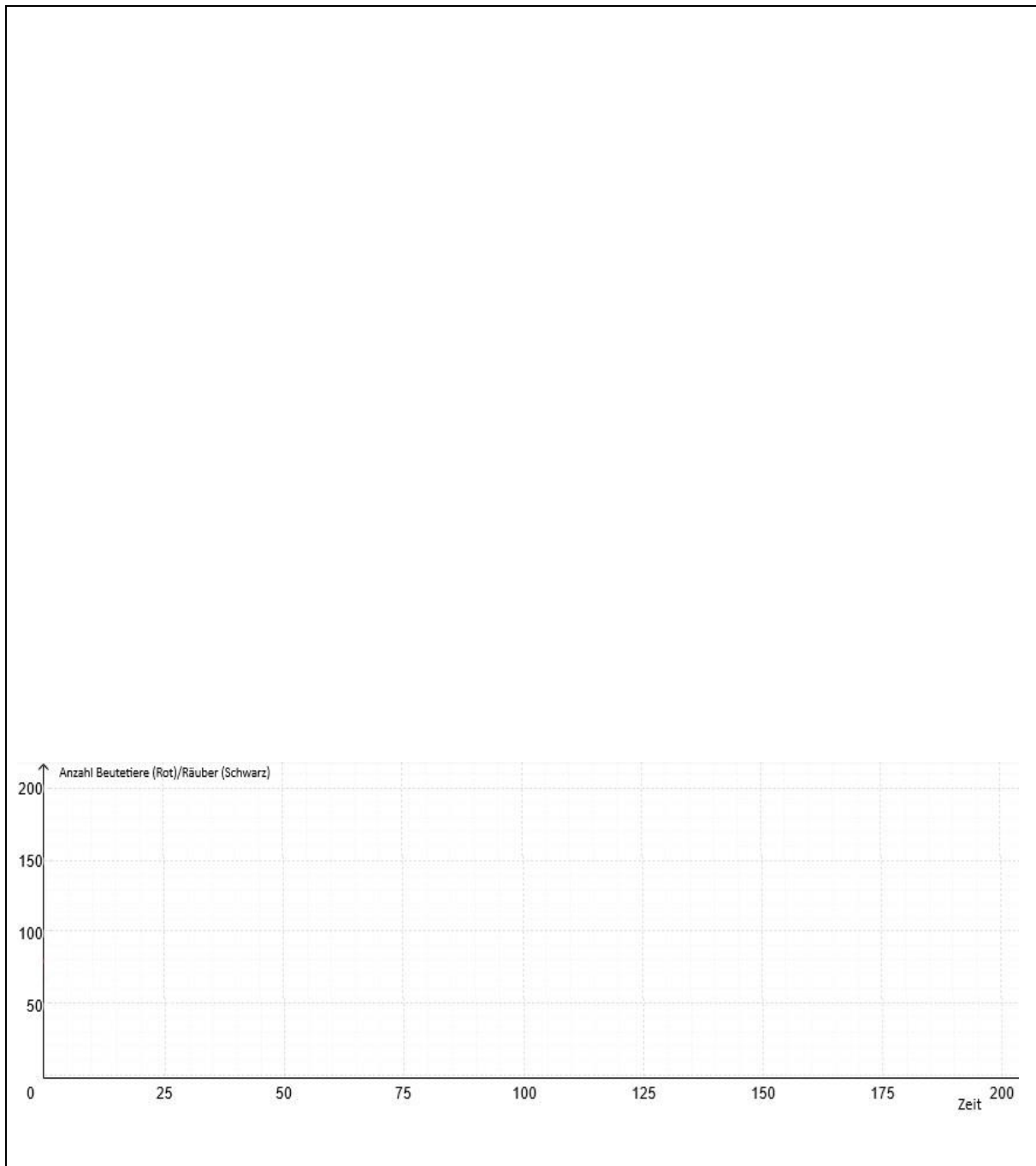




# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 1: Das Räuber-Beute-Modell

- 1.3 Das Räuber-Beute-Modell (auch Lotka-Volterra-Modell) ist ein mathematisches Modell, das beschreibt, wie Populationen von Räubern (z.B. Luchse) und Beute (z.B. Hasen) sich gegenseitig beeinflussen. Beschreibt wie die gegenseitigen Beeinflussungen aus Aufgabe 1.2 in der Natur von statten gehen könnten. Skizziert anschließend in das Koordinatensystem wie das Modell aussehen könnte.

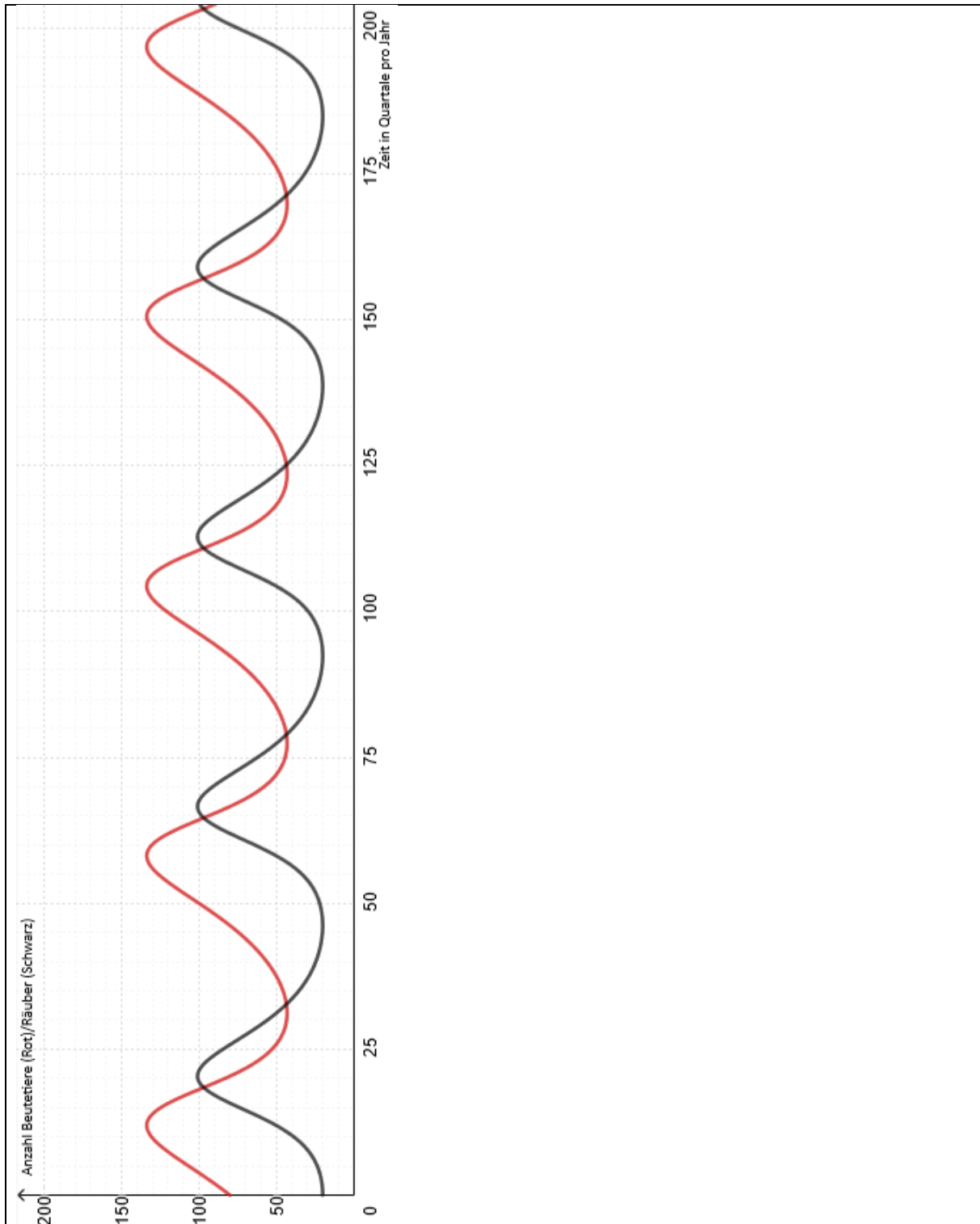




# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 1: Das Räuber-Beute-Modell

- 1.4 Interpretiert stichpunktartig die folgende Abbildung. Beschriftet zusätzlich die Abbildung und nutzt gegebenenfalls Farben.

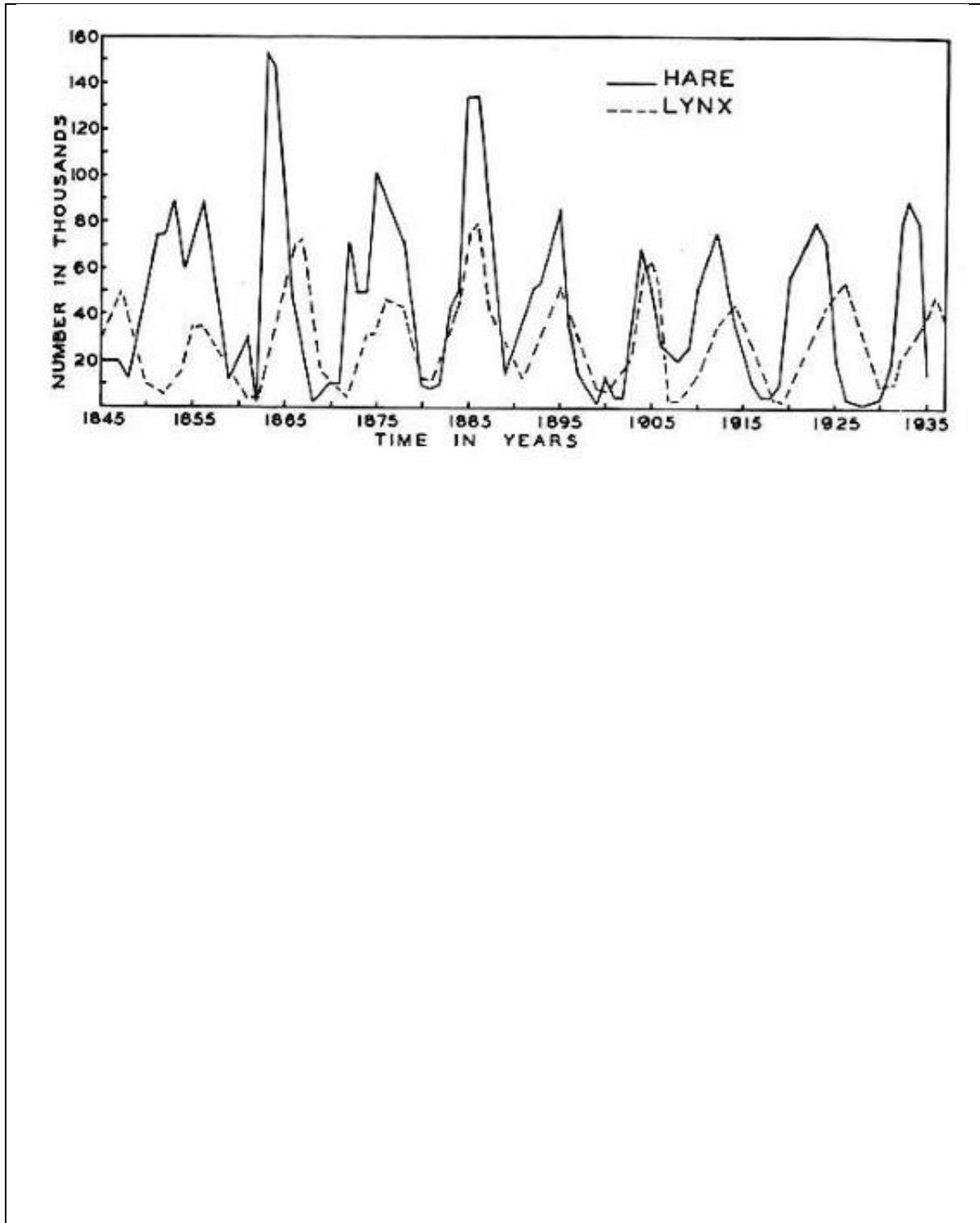




# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 1: Das Räuber-Beute-Modell

- 1.5 Vergleichen Sie die folgende Abbildung mit realen Daten gegenüber dem simulierten Modell. Notieren Sie Ihre Beobachtungen. (Hare engl. = Hase, Lynx engl. = Luchs)





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 1: Das Räuber-Beute-Modell

- 1.6 Ein mathematisches Modell dient unter anderem dazu, komplexe Phänomene vereinfacht darzustellen. Deswegen benötigt man vorab gewisse Annahmen, unter denen das Modell funktioniert, auch wenn diese unter Umständen nicht zu den realen Begebenheiten passen. Notiert welche Annahmen getroffen werden müssen, damit das Modell aus der vorherigen Aufgabe 1.4 angewendet werden darf? Ergänzt anschließend die Annahmen mit Hilfe von Infotext 1.

Annahmen:

- Räuber fressen ausschließlich Beutetiere und nichts anderes
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
-





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 1: Das Räuber-Beute-Modell

### Gruppenergebnis

Nutzt eure Erkenntnisse aus Aufgabe 1.4, 1.5 und eurer Karteikarten, um die wesentlichen Merkmale des Modells hervorzuheben. Geht besonders darauf ein, wie das Modell die Beziehung zwischen Räuber- und Beutepopulationen erklärt.





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

Im folgenden Aufgabenteil 2 betrachten wir, wie das Räuber-Beute-Modell für ein konkretes Beispiel genutzt werden kann. In Aufgabe 1 haben wir bereits gesehen, dass unser Modell zwei **Graphen** enthält, somit benötigen wir also auch 2 Gleichungen. Die zwei Gleichungen werden wir hier in ihrer **diskreten** Form herleiten.

- 2.1 Notiert eure Vermutungen, was die beiden Gleichungen biologisch und mathematisch ausdrücken sollen.

- 2.2 Für die Formel beschäftigen wir uns zunächst mit der Frage, was  $\Delta T$  bedeutet. Angenommen im Januar beträgt die Kaninchenpopulation 100 Tiere und im Juni 150. Die vergangene Zeit ist unser  $\Delta T$ . Wie könnte man  $\Delta T$  mathematisch darstellen, um die zeitliche Differenz zwischen den beiden Zeitpunkten auszudrücken? Beschreibt dies auch in eigenen Worten.

$$\Delta T = \underline{\quad} - \underline{\quad}$$



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

- 2.3 Entsprechend der Aufgabe 2.2, was bedeutet  $\Delta B$  und  $\Delta R$  wenn jeweils **B** für die Populationsgröße der Beute und **R** für die Populationsgröße der Räuber stehen. Wie müssen die Formeln lauten müssten. Überprüft eure Antwort mithilfe des Lösungshefts Seite 33.



$$\Delta B = \underline{\quad} - \underline{\quad}$$

$$\Delta R = \underline{\quad} - \underline{\quad}$$

- 2.4 Wenn **B** für die Populationsgröße der Beute, **R** für die Populationsgröße der Räuber und **T** für die Zeit steht, welcher der folgenden Brüche beschreibt die Änderung der Beutepopulation pro Zeit?

$\frac{\Delta B}{\Delta T}$	$\frac{\Delta T}{\Delta B}$	$\frac{\Delta B - \Delta T}{\Delta R - \Delta T}$	$\frac{\Delta R}{\Delta T}$	$\frac{\Delta B - \Delta R}{\Delta T}$
3	1	7	5	9

- 2.5 Welcher der folgenden Brüche beschreibt die Änderung der Räuberpopulation pro Zeit?

$\frac{\Delta B}{\Delta T}$	$\frac{\Delta T}{\Delta B}$	$\frac{\Delta B - \Delta T}{\Delta R - \Delta T}$	$\frac{\Delta R}{\Delta T}$	$\frac{\Delta B - \Delta R}{\Delta T}$
8	3	10	4	7



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

- 2.6 Ergeben die Zahlen unter euren ausgewählten Brüchen in Aufgabe 2.4 und 2.5 in Summe 7? Falls nicht, nutzt das Hilfeheft, um euren Fehler zu finden.
- 2.7 Setzt die Definitionen aus Aufgabe 2.3, in die ausgewählten Definitionen von Aufgabe 2.4 und 2.5 ein. So erhaltet ihr die linken Seiten der beiden Gleichungen.



$$\frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} = \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} - \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)}$$
$$\frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} = \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)} - \frac{\left( \quad \right)}{\left( \quad \right)}$$



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

2.8 Da nun jeweils die linken Seiten der beiden gesuchten Gleichungen bekannt sind, gilt es die rechten Seiten zu ermitteln. Stellt dafür Vermutungen auf, wie viele weitere Variablen ihr benötigt. Beschreibt außerdem, was für eine biologische Bedeutung die Variablen haben. Bezieht euch hierbei auf Aufgabe 2.1 und eure Karteikarten aus Aufgabe 1.1.



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

2.9 Für das Modell werden 4 weitere Variablen **N, S, W, F** benötigt um die rechten Seiten der beiden Formeln zu beschreiben. Verbindet zunächst die unten stehenden Variablen mit der jeweils passenden Erklärung. Überprüft anschließend eure Auswahl mittels Hilfeheft, Seite 39.

<b>N</b>	Geschwindigkeit mit der die Beutepopulation <b>wächst</b>
<b>S</b>	Geschwindigkeit mit der die Beute von den Räubern <b>gefangen</b> werden
<b>W</b>	<b>Nachwuchs</b> , der aufgrund der gefangenen Beute heranwachsen und selbst zu Räubern werden kann
<b>F</b>	Geschwindigkeit mit der die Räuber <b>sterben</b>

2.10 Ergänzt im folgenden Text die passenden Variablen aus Aufgabe 2.3 und 2.9 um die Formel für die Änderung der Beutepopulation zu erhalten.

Die Gleichung zur Änderung der Beutepopulation besagt, dass die Änderung in der Anzahl der Beutetiere ( $\Delta B$ ) pro Zeitspanne ( $\Delta T$ ) von zwei Dingen abhängt:

- **\_\_B**: Die Anzahl der Beutetiere **B** wächst mit einer bestimmten Geschwindigkeit \_\_.
- **\_\_B\_\_**: Die vorhandenen Räuber \_\_ fangen Beutetiere mit einer bestimmten Geschwindigkeit \_\_. Diese hängt davon ab, wie viele Beutetiere **B** und wie viele Räuber \_\_ es gibt.

Somit lautet die Formel zur Änderung der Beutepopulation wie folgt:

$$\frac{\Delta B}{\Delta T} = \text{__} B - \text{__} B \text{__}$$



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

2.11 Ergänzt im folgenden Text die passenden Variablen aus Aufgabe 2.3 und 2.9 um die Formel für die Änderung der Räuberpopulation zu erhalten.

Die Gleichung zur Änderung der Räuberpopulation zeigt, dass die Änderung der Anzahl der Räuber ( $\Delta R$ ) pro Zeitspanne ( $\Delta T$ ) von zwei anderen Dingen abhängt als die Gleichung zur Änderung der Beutepopulation:

- $R$    : Nachwuchs der Räuber  $R$ , kann abhängig von der Menge der gefangenen Beute    heranwachsen   . Ebenfalls fließt hier ein wie viele Räuber  $R$  vorhanden sind, um Nachwuchs zu zeugen.
- $R$    : Räuber  $R$  sterben mit einer bestimmten Geschwindigkeit

Somit lautet die Formel zur Änderung der Räuberpopulation wie folgt:

$$\frac{\Delta R}{\Delta T} = \text{---} R \text{---} - \text{---} R$$

2.12 Stellt abschließend die Formeln aus Aufgabe 2.10 und 2.11 zusammen mit dem Wissen aus Aufgabe 2.7 jeweils in **diskrete** Formen um. Warum wird aus dieser neuen Form ersichtlich, dass ein neuer Zeitpunkt aus einem alten Zeitpunkt errechnet wird (**rekursiv**)?





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

- 2.13 Entnehmt aus **Infotext 2** alle relevanten Daten, die ihr benötigt, um die Formeln für das Räuber-Beute-Modell anwenden zu können. Notiert die Daten zusammen mit den entsprechenden Variablenbezeichnungen.







# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

- 2.14 Nutzt die Daten aus Aufgabe 2.13 und die Formel aus Aufgabe 2.12, um **rekursiv** zu berechnen, wie sich die Beutepopulation innerhalb des ersten und zweiten Monats verändert ( $\Delta T = 1$  Monat). Verwendet anschließend Simulation 1, um die Veränderung der Räuberpopulation zur selben Zeit zu bestimmen.





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 2: Das Modell im Einsatz

### Gruppenergebnis

Notiert die Formel für das Räuber-Beute-Modell aus Aufgabe 2.11. Beschreibt die verwendeten Variablen im Hinblick auf die Biologie. Berücksichtigt hierfür die Informationen aus Aufgabe 2.9.

Haben sich eure Vermutungen aus Aufgabe 2.1 bestätigt? Falls nicht, wieso nicht?





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 3: Die Parameter und ihre Bedeutung

Nachdem ihr nun die realen Daten in das Modell eingesetzt habt, werdet ihr im Folgenden die einzelnen **Parameter** noch einmal genauer unter die Lupe nehmen und dabei beobachten, welche Auswirkungen sie auf die Populationen haben.

3.1 Welche Auswirkungen könnten die unten genannten Parameter auf das Modell haben, wenn man sie variiert? Notiert eure Vermutungen hier.

**B** (Populationsgröße der Beute)

**R** (Populationsgröße der Räuber)

**W** (Wachstumsrate)

**F** (Fangrate)

**N** (Nachwuchseffizienz)

**S** (Sterberate der Räuber)



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 3: Die Parameter und ihre Bedeutung

- 3.2 Verwendet Simulation 2 um die Parameter wie darin angegeben zu variieren. Vergleicht die Ausgangslage und die veränderten Graphen. Notiert eure Beobachtungen hier.

**B** (Populationsgröße der Beute)

**R** (Populationsgröße der Räuber)

**W** (Wachstumsrate)

**F** (Fangrate)

**N** (Nachwuchseffizienz)

**S** (Sterberate der Räuber)





# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 3: Die Parameter und ihre Bedeutung

- 3.3 Erklärt eure Beobachtung aus Aufgabe 3.2 unter biologischen Gesichtspunkten. Überlegt euch zusätzlich welche möglichen Ursachen in der Natur zu den Änderungen der Parameter führen können. **Hinweis:** Mögliche Lösungen hierzu finden sich im abschließenden Quiz, deswegen unbedingt an dieser Stelle erst eigene Gedanken machen.



**B** (Populationsgröße der Beute)

**R** (Populationsgröße der Räuber)

**W** (Wachstumsrate)

**F** (Fangrate)

**N** (Nachwuchseffizienz)

**S** (Sterberate der Räuber)



# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 3: Die Parameter und ihre Bedeutung

### Gruppenergebnis

Notiert ob eure Vermutungen aus Aufgabe 3.1 mit euren Beobachtungen aus Aufgabe 3.2 übereinstimmen und falls nicht wieso? Bearbeitet anschließend das Quiz.







# Kreislauf des Lebens: Räuber und Beute im Wechselspiel

## Aufgabe 3: Die Parameter und ihre Bedeutung

Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“  
RPTU Kaiserslautern-Landau  
Institut für Mathematik  
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)  
Fortstraße 7  
76829 Landau

<https://mathe-labor.de>

Zusammengestellt von:  
Lars Heppes

Betreut von:  
Henrik Ossadnik

Variante A

Veröffentlicht am:  
04.11.2024