



Station
„USA – ein Land der
unbegrenzten
Möglichkeiten?“
Teil 3

Arbeitsheft

Schule

Klasse

Tischnummer

--	--	--	--	--	--	--	--

Teilnehmercode



Mathematik-Labor
"Mathe ist mehr"



Mathematik-Labor

USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Im 3. Teil der Station präsentieren die beiden Landvermesser Liam und Noah eine neue Möglichkeit der Landvermessung. Dabei stellen sie die gesamten Ergebnisse ihrer Forschung vor. Ihre Erkenntnisse ermöglichen es auf einfachste Art und Weise Flächen zu berechnen.

Wichtig: Bearbeiten Sie bitte alle Aufgaben der Reihe nach!



Zu dieser Aufgabe gibt es Hilfen im Hilfeheft.



Diskutiert hier eure wichtigsten Ergebnisse und fasst sie zusammen.



Zu dieser Aufgabe gibt es eine Simulation oder ein Video.



Zu dieser Aufgabe gibt es Material auf eurem Tisch.



Wir wünschen Ihnen viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

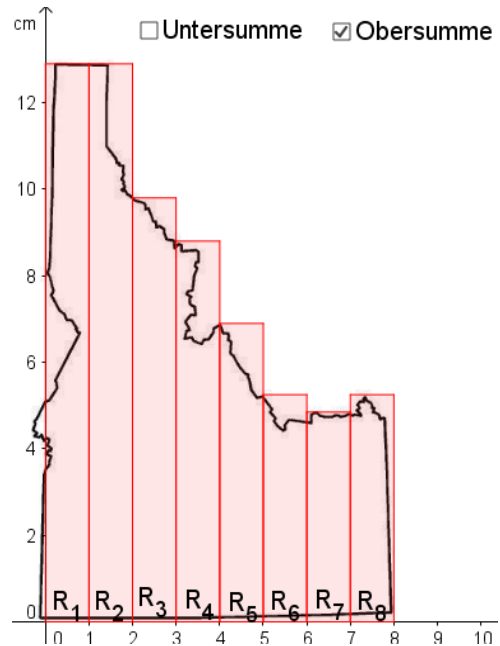
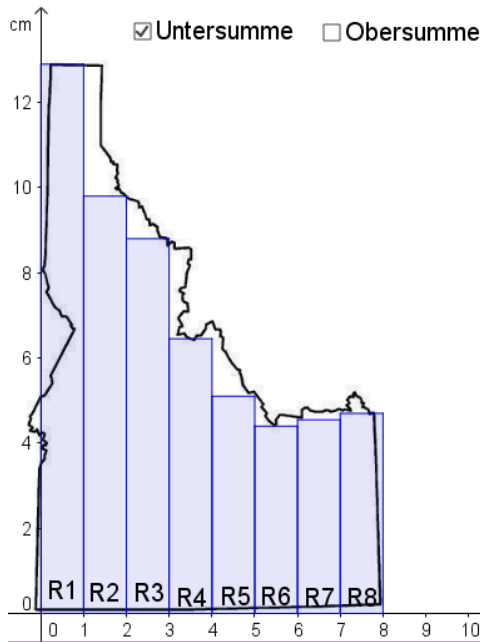
Aufgabe 7: Rätselspaß

Nach dem anstrengenden Kongresstag lassen es sich die beiden Landvermesser am nächsten Morgen in ihrem Hotelzimmer so richtig gut gehen und bestellen sich ein riesiges Frühstück. Zusätzlich zu Ihrer Bestellung erhalten Sie die aktuelle Tageszeitung, in der Sie ein kniffliges Quiz über ihr Fachgebiet finden.

7.1 Helfen Sie Landvermesser Liam und Noah die Fragen im Quiz zu beantworten.

Bemerkung: Bei manchen Fragen sind mehrere richtige Antworten möglich.

Frage 1: Die Abbildungen zeigen links eine Untersumme und rechts eine Obersumme, die beide den Flächeninhalt von Idaho näherungsweise beschreiben.



Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Kreuzen Sie an.

- Die Obersumme ist immer etwas größer als der eigentliche Flächeninhalt. **V**
- Die Obersumme ist immer etwas kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. **I**
- Die Untersumme ist immer etwas größer als der eigentliche Flächeninhalt. **A**
- Die Untersumme ist immer etwas kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. **E**



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 7: Rätselspaß

Frage 2: Wie verhalten sich Ober- und Untersumme, wenn man die Anzahl der Streifen variiert?

- Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Obersumme immer größer und bleibt auch insgesamt größer als der eigentliche Flächeninhalt. **N**
- Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Untersumme immer größer und bleibt aber insgesamt kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. **R**
- Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Obersumme immer kleiner und bleibt aber insgesamt größer als der eigentliche Flächeninhalt. **L**
- Erhöht man die Anzahl der Streifen, so wird die Untersumme immer kleiner und bleibt auch insgesamt kleiner als der eigentliche Flächeninhalt. **M**

Frage 3: Wie stehen Ober- und Untersumme zueinander, wenn man die Anzahl der Streifen möglichst groß werden lässt.

- Ober- und Untersumme nähern sich einem beliebigen Wert an. **T**
- Ober- und Untersumme nähern sich dem eigentlichen Flächeninhalt an. **E**
- Ober- und Untersumme weichen stärker voneinander ab. **R**
- Ober- und Untersumme entfernen sich vom eigentlichen Flächeninhalt. **A**

Frage 4: Wie kann der Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse gedeutet werden?

- Ableitungsfunktion **S**
- Randfunktion **G**
- Stammfunktion **I**
- Parabel **K**

Frage 5: Vervollständigen Sie die folgende Definition der Stammfunktion. Sei f eine auf dem Intervall I definierte Funktion. Dann heißt die Funktion F Stammfunktion von f im Intervall I , wenn gilt:

- $F'(x) = f(x) \forall x \in I$ **H**
- $F(x) = f'(x) \forall x \in I$ **R**
- Die Ableitung der Stammfunktion $F(x)$ ergibt die Funktion $f(x)$. **U**
- Die Ableitung der Funktion $f(x)$ ergibt die Stammfunktion $F(x)$. **R**



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 7: Rätselspaß

Frage 6: Was ist eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^4$?

$F(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3$

A

$F(x) = \frac{1}{15} \cdot x^5$

N

$F(x) = \frac{7}{105} \cdot x^5$

G

$F(x) = \frac{1}{5} \cdot x^5$

L

7.2 Reihen Sie nun die Kennbuchstaben der richtigen Aussagen aus Aufgabe 8.1 aneinander.

Es ergibt sich ein Lösungswort.

Das Lösungswort lautet:



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 8: Der Vortrag

Nach dem Frühstück brechen Landvermesser Liam und Noah auf und fliegen zurück nach Idaho. Zu Hause angekommen vertiefen sie sich in ihre Forschung. Nach einem Jahr harter Arbeit entdeckten sie etwas, was andere nie für möglich gehalten haben: das Integral. Ihre Erkenntnis präsentierten Sie auf dem 2. internationalen Kongress:

Noah: „Zu Beginn unserer Forschung haben wir die Fläche unseres Heimatbundesstaat Idaho vermessen. Aufgrund seiner vorteilhaft verlaufenden Staatsgrenzen ist es möglich Idaho geschickt in einem Koordinatensystem zu positionieren, sodass die y-Achse die westliche und die x-Achse die südliche Grenze des Staates darstellt. Im Nord-Westen von Idaho verläuft die Grenze annähernd wie eine Funktion 2. Grades. Mit Hilfe dieser Erkenntnis konnten wir die Fläche von Idaho gekonnt eingrenzen. Bei der genauen Vermessung von Idaho haben wir festgestellt, dass sich der Flächeninhalt von Idaho durch Ober- und Untersummen beschreiben lässt. Wählt man unendlich viele und dafür schmalere Streifen für die Berechnung von Ober- und Untersumme, so stellt man fest, dass sich diese demselben Grenzwert annähern. Dieser entspricht dem tatsächlichen Flächeninhalt von Idaho.“

Definition Integral

Sei f eine Funktion auf dem Intervall $[a; b]$ und U_n die Untersumme bzw. O_n die Obersumme.

Streben U_n und O_n , wenn $n \rightarrow \infty$, gegen denselben Grenzwert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$$

so heißt dieser gemeinsame Grenzwert das Integral von f über $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n =: \int_a^b f(x) dx$$

(Sprechweise: „Integral von $f(x)$ von a bis b “)



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 8: Der Vortrag

Das Integralzeichen \int ist aus dem S vom lateinischen Wort Summa (deutsch Summe) entstanden; dx steht für immer kleiner werdende Intervallbreiten.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Diagram labels:

- obere Grenze (blue text, pointing to b)
- untere Grenze (red text, pointing to a)
- Integrand (red text, pointing to $f(x)$)
- Integrationsvariable (green text, pointing to x in $f(x)$ and dx)

Nach dem 1. Teil des Vortrags haben alle Anwesenden Landvermesser die Gelegenheit Fragen zu stellen und sich mit der Materie zu beschäftigen.

In den folgenden Aufgaben haben Sie die Möglichkeit Integrale aufzustellen und deren Schreibweise zu vertiefen.

Material 1

■ Legende

Legende: Landkarte 1913

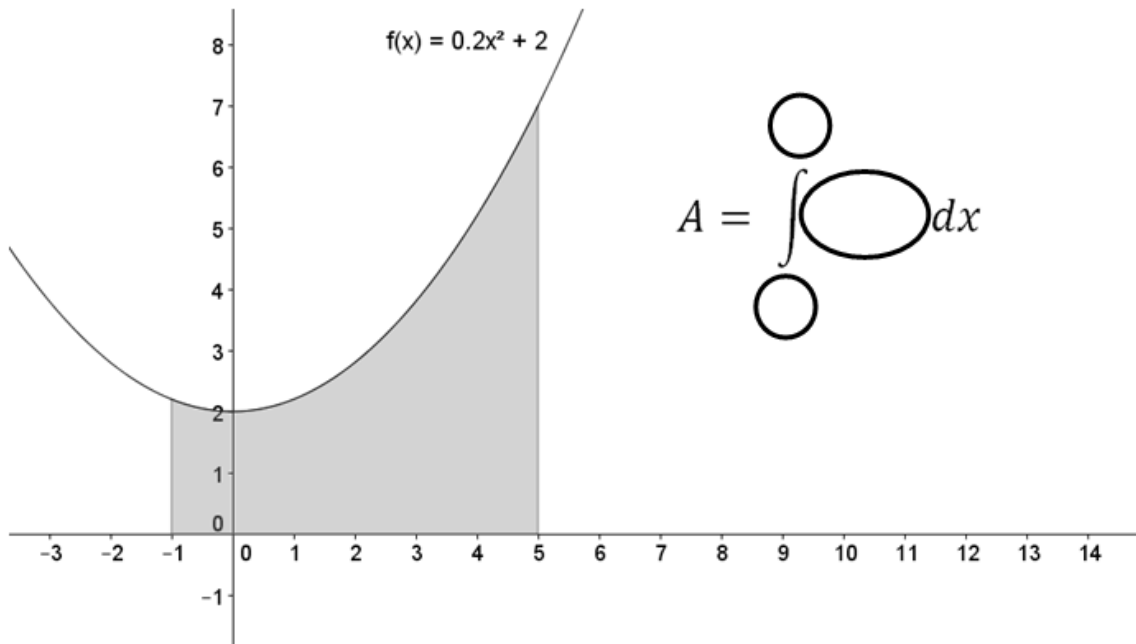
AL = Alabama	NC = North Carolina
AR = Arkansas	ND = North Dakota
AZ = Arizona	NE = Nebraska
C = Connecticut	NH = New Hampshire
CA = Kalifornien	NJ = New Jersey
CO = Colorado	NM = New Mexico
D = Delaware	NV = Nevada
FL = Florida	NY = New York
GA = Georgia	OH = Ohio
IA = Iowa	OK = Oklahoma
ID = Idaho	OR = Oregon
IL = Illinois	PA = Pennsylvania
IN = Indiana	RI = Rhode Island
KS = Kansas	SC = South Carolina
KY = Kentucky	SD = South Dakota
LA = Louisiana	TN = Tennessee
MA = Massachusetts	TX = Texas
MD = Maryland	UT = Utah
ME = Maine	VA = Virginia
MI = Michigan	VT = Vermont
MN = Minnesota	WA = Washington
MO = Missouri	WI = Wisconsin
MS = Mississippi	WV = West Virginia
MT = Montana	WY = Wyoming



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 8: Der Vortrag

8.1 Ergänzen Sie das Integral so, dass es den Flächeninhalt unter dem angegebenen Graphen beschreibt.



8.2 Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgabe einen weiteren Laptop. Stellen Sie in Partnerarbeit ein Integral auf, mit dem sich der Flächeninhalt von einem Bundesstaat der USA berechnen lässt. Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgabe **Simulation 9**. Benutzen Sie hierbei die x-Achse als südliche, die Gerade a als westliche, Gerade b als östliche und die Funktion f(x) als nördliche Grenze des Bundesstaates.

Notieren Sie hier Ihr Integral und den dazugehörigen Bundesstaat.

Bundesstaat	Integral





USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 8: Der Vortrag

- 8.3 Teilen Sie dem andren Zweierteam Ihrer Gruppe Ihr aufgestelltes Integral mit. Versuchen Sie herauszufinden, zu welchem Bundesstaat das Integral des andren Teams gehört. Verwenden Sie hierzu auch wieder die **Simulation 9** und notieren Sie ihre Ergebnisse.

- 8.4 Finden Sie zu den angegebenen Integralen den jeweils passenden Bundesstaat. Verwenden Sie hierzu **Simulation 9**.

Integral	Bundesstaat
$\int_{-3.3}^{-1.3} 1,4 dx$	
$\int_{3.7}^{5.1} -0,75x + 4,55 dx$	
$\int_{2.5}^{4.35} -0,5(x - 3,8)^2 + 0,85 dx$	





USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 8: Der Vortrag

- 8.5 Geben Sie zu den gegebenen Bundesstaaten ein möglichst genaues Integral an. Die Schwierigkeit nimmt von oben nach unten zu. Verwenden Sie auch hier wieder **Simulation 9**.

Notieren Sie Ihre Integrale in den entsprechenden Feldern!

Bundestaat	Integral
Kansas (KS)	
New York (NY)	
New Hampshire (NH)	
Idaho (ID)	
Michigan (MI)	
Virginia (VA)	



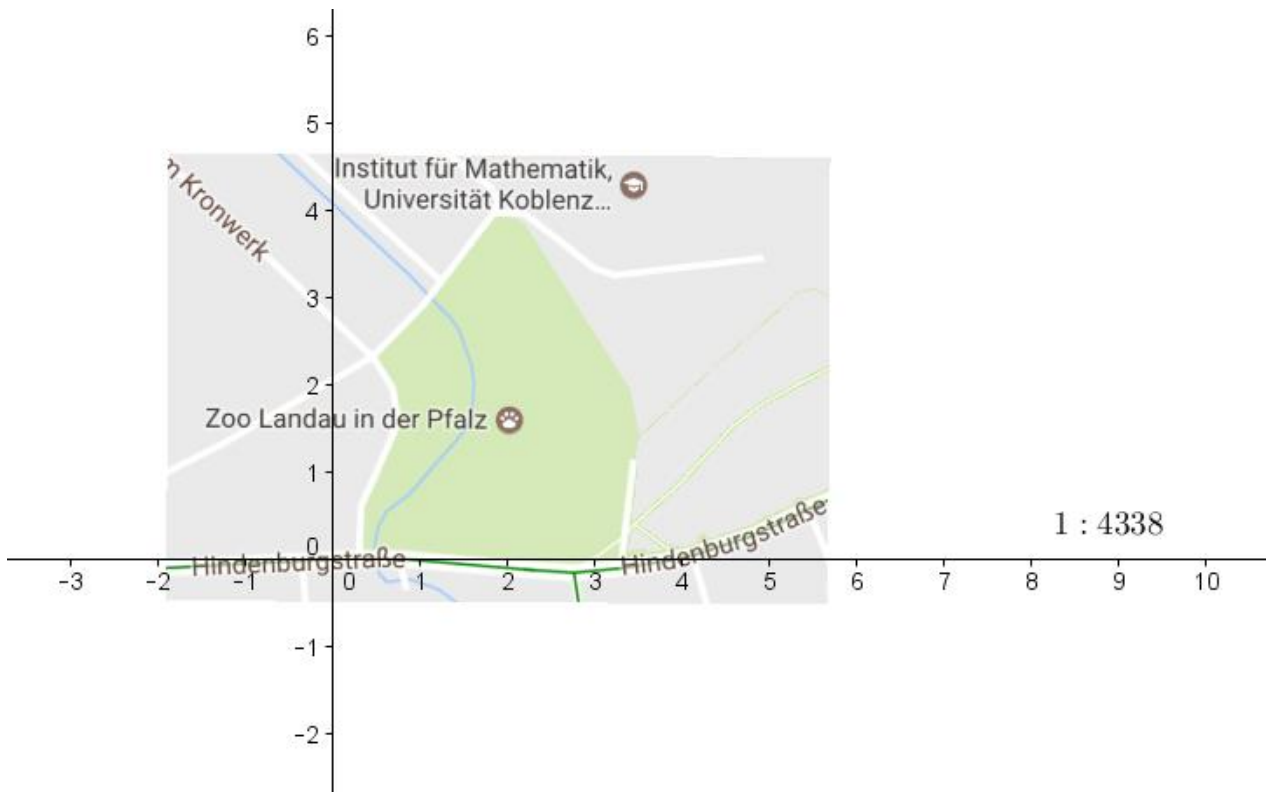


USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

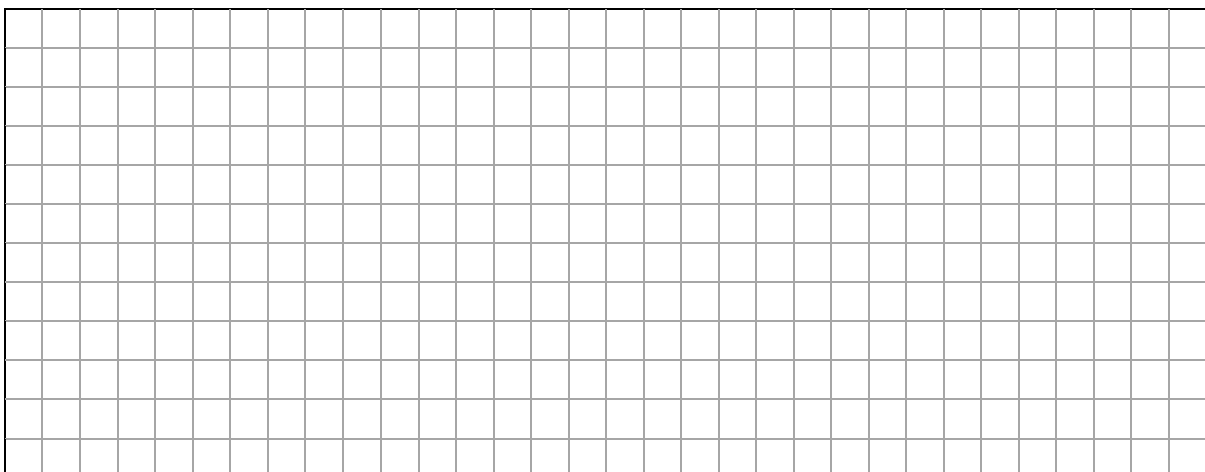
Aufgabe 9: Internationale Beziehungen

Liam und Noah werden von einem deutschen Professor der Universität Landau angesprochen. Dieser soll im Rahmen seiner Forschungsarbeit die Fläche des Landauer Zoos vermessen, damit der Zoo die Fläche optimal ausnutzen kann. Dafür benötigt er die Hilfe von Liam und Noah.

9.1. Zeichnen Sie eine geeignete Funktion mit dazugehöriger Ober- und Untersumme in die Karte ein.



9.2. Berechnen Sie mit Hilfe der Ober- und Untersumme näherungsweise den Flächeninhalt des Zoos Landau in der Pfalz.





USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 9: Internationale Beziehungen

- 9.3. Beschreiben Sie das Vorgehen, zu einer exakten Berechnung des Flächeninhalts. Nutzen Sie dazu die in diesem Heft gelernten Inhalte.



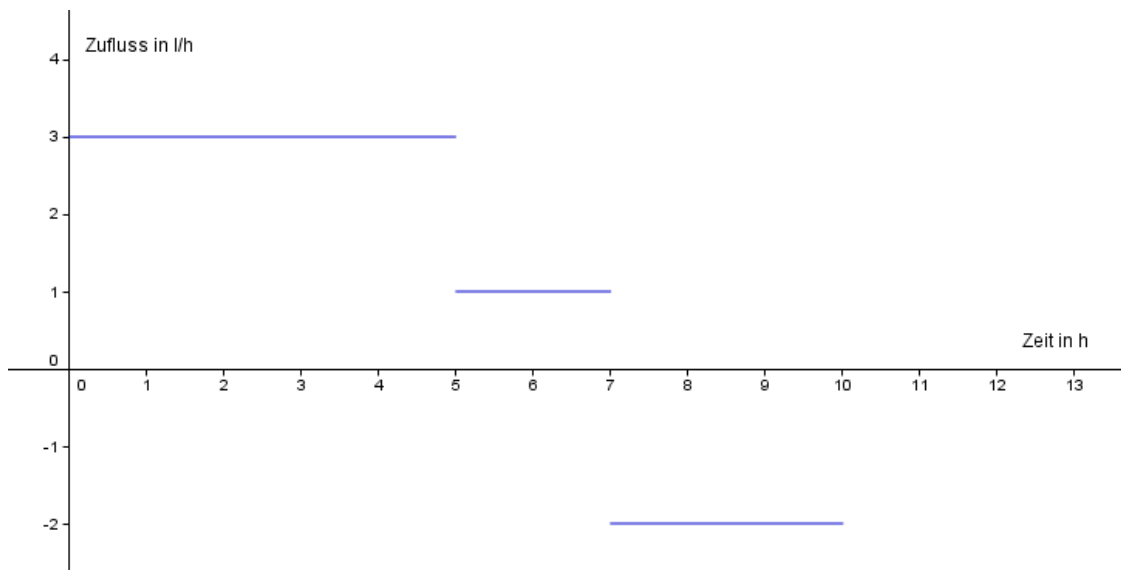
USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 9: Internationale Beziehungen

Nachdem Liam und Noah mit Ihrer Hilfe erfolgreich die Fläche des Landauer Zoos berechnen konnten setzen sie ihren Vortrag weiter fort.

Liam: „Bevor wir zum Höhepunkt des heutigen Vortrags kommen, möchten wir Ihnen eine weitere essentielle Erkenntnis unserer Forschung präsentieren.“

9.4 Die Graphik zeigt die momentane Zuflussrate einer Badewanne. Notieren Sie eine passende Geschichte zum vorliegenden Diagramm.





USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 9: Internationale Beziehungen

- 9.5 Stellen Sie die Stammfunktion auf, die angibt, wie viel Wasser sich nach einem Zeitpunkt t in der Badewanne befindet.

- 9.6 Betrachten Sie das Intervall $[0, 5]$. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion und der aufgestellten Stammfunktion verwenden Sie dazu die Integralschreibweise.



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 9: Internationale Beziehungen

Die beiden Landvermesser Liam und Noah präsentieren als Höhepunkt ihrer Rede das Endergebnis. Verknüpft man die beiden Informationen zu Ober- und Untersumme sowie das Badewannenmodell miteinander so erhält man den Hauptsatz der Integralrechnung. Dies sichert Ihnen die Verleihung der Ehrennadel des 2. internationalen Landvermesserkongresses.

Hauptsatz der Integralrechnung Teil 2

Die Funktion f sei im Intervall I stetig.

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in I , dann gilt für $a \in I$ und $b \in I$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

10.1 Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die Stammfunktionen.

Funktion	Stammfunktion
$f(x) = 1.4$	
$g(x) = -0.75x + 4.55$	
$h(x) = -0.5(x-3.8)^2 + 0.85$ $= -0.5x^2 + 3.8x + 8.07$	





USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Aufgabe 9: Internationale Beziehungen

10.2 Berechnen Sie die folgenden Integrale aus Aufgabe 8.4.



$$\int_{-3.3}^{-1.3} 1,4 \, dx$$

$$\int_{3.7}^{5.1} -0,75x + 4,55 \, dx$$

$$\int_{2.5}^{4.35} -0,5(x - 3,8)^2 + 0,85 \, dx$$

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Zusatzaufgabe

Vergleichen Sie den Flächeninhalt (Einheit FE) von North Dakota (ND) und South Dakota (SD). Verwenden Sie dazu **Simulation 9**.



North Dakota (ND)

South Dakota (SD)

Welcher Staat ist größer? Begründe.



USA – ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?

Zusatzaufgabe

Wählen Sie weitere Bundesstaaten aus und berechnen Sie deren Flächeninhalt. Sie können hierzu die Bundesstaaten aus Aufgabe 8.5 verwenden. Nutzen Sie dazu **Simulation 9**.



Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
RPTU Kaiserslautern-Landau
Institut für Mathematik
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7
76829 Landau

<https://mathe-labor.de>

Zusammengestellt von:
Rike Daumen, Maike Erksmeyer, Nora Klotz

Betreut von:
Moritz Walz

Variante A

Veröffentlicht am:
17.03.2017